Kişi Yüzlerinin Ayırtedilmesi İçin Yeni Bir Yöntem
A Novel Method for Face Recognition

Hakan Çevikalp[1], Marian Neamtu[2], Mitch Wilkes[1], Atalay Barkana[3]

[1]Vanderbilt Üniversitesi, Elektrik ve Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, 37235 Nashville, A.B.D
[2]Vanderbilt Üniversitesi, Matematik Bölümü, 37235 Nashville, A.B.D
[3]Osmangazi Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Meşelik, Eskişehir
hakan.cevikalp@vanderbilt.edu, neamtu@math.vanderbilt.edu, mitch.wilkes@vanderbilt.edu, abarkana@ogu.edu.tr

Özetçe

Bu bildiride kişi yüzlerinin ayırtedilmesi için, Ayirtedici Ortak Vektör yöntemi olarak adlandırdığımız etkili bir yöntem sunulmuştur. Herbir farklı sınıfı temsil eden ayırtedici ortak vektörler, sınıflar içi saçılım matrisinin sıfır altuzayından seçilen izdüşüm vektörleri kullanılarak elde edilmiş ve kişi yüzlerinin sınıflandırılması için kullanılmıştır. Ayrıca ortak vektörleri bulmak için altuzay yöntemlerine dayalı ikinci bir alternatif yöntem önerilmiştir. Yapılan test sonuçları Ayırtedici Ortak Vektör yönteminin doğruluk ve verimlilik bakımından diğer yöntemlere oranla daha iyi olduğunu göstermektedir.

Abstract

In this paper we propose an efficient method called the Discriminative Common Vector method for face recognition. The discriminative common vectors representing each person in the training set of the face database are obtained by using the projection directions found in the null space of the within-class scatter matrix. Then, these vectors are used for classification of new faces. Also, an alternative method based on the subspace methods is given to obtain the common vectors. Our test results show that the Discriminative Common Vector method is superior to other methods in terms of recognition accuracy and efficiency.

1. Giriş

Son yıllarda askeri, ticari ve yasal uygulama alanlarının artması nedeniyle yüzlerin otomatik olarak tanınması çok popüler bir konu haline gelmiştir. İmge-video işleme, örüntü tanıma ve yapay zeka-sinir ağları gibi alanlar bu konuyla yakından ilgilenmektedir. Kişi yüzlerinin tanınmasında her bir kişiye ait daha önceden kaydedilen imgelerden faydanılır. Veriler kontrol edilmiş şartlarda elde edilen imgelerden (pasaport, kredi kartı, kimlik, v.b. üzerindeki imgeleler) gelebileceği gibi, gerçek zamanda kaydedilen video görüntülerinden de gelebilir [1]. Yüz tanıma problemi imgelerdeki yüzlerin sezilmesini, sınırlarının belirlenmesini, özniteliklerinin bulunmasını ve özniteliklerin kullanılarak yüzlerin sınıflandırılmasını içermektedir [2]. Üç boyut poz farklılıkları, değişik yüz ifadeleri, aydınlatma farklılıkları, makyaj, saç stili, arkaplan farklılıkları, gürültü ve ölçek farklılıkları, v.b. yüz tanıma işlemini oldukça güçleştirmektedir.

Son 10 yılda yüz tanınması için birçok yöntem önerilmiştir. Bu yöntemler arasında görünüşe dayalı (appearance based) yöntemler yüz imgelerini iki boyutlu nesneler olarak işlemektedirler. Bu yöntemlerde *w*x*h* boyutlu imgeler, *wh*-boyutlu uzaydaki noktalar olarak ifade edilirler. Örnek uzayı (sample space) olarak isimlendirilen bu uzay genellikle çok büyük boyutludur. Bununla birlikte, insan yüzlerinin benzer yapıya sahip olması nedeniyle, yüz imgeleri daha küçük boyutlu bir uzayda fazla bilgi kaybı olmadan ifade edilebilirler. Bu amaçla Eigenface [3], Fisherface [4], [5], Null Space [6] ve Direct-LDA [7] yöntemleri önerilmiştir. Bu bildiride anlatılan yöntem, Null Space yöntemi üzerine kurulmuştur.

2. Null Space Yöntemi

Bu yöntem aşağıda verilen ölçütü enbüyütme amacını güder:

$$J(\mathbf{W}_{opt}) = \arg\max \frac{|\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}_{\mathbf{B}}\mathbf{W}|}{|\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}_{\mathbf{T}}\mathbf{W}|}. \qquad (1)$$

Bu eşitlikte $\mathbf{S}_{\mathbf{B}}$ sınıflar arası saçılım matrisini, $\mathbf{S}_{\mathbf{T}}$ tüm örneklere ait toplam saçılım matrisini ifade etmektedir. Bu ölçütün Fisher ölçütünden farkı bölen kısmında sınıflar içi saçılım matrisi $\mathbf{S}_{\mathbf{W}}$'nun yerine $\mathbf{S}_{\mathbf{T}}$'nin kullanılmasıdır. Bu sebeple bu ölçüt değiştirilmiş Fisher ölçütü (modified Fisher criterion) olarak adlandırılmıştır [8]. Eğer izdüşüm vektörleri sınıflar içi saçılım matrisi $\mathbf{S}_{\mathbf{W}}$'nun sıfır altuzayından seçilirse, bu ölçüt en büyük değeri olan 1 sayısına ulaşır. Başka bir deyişle, $\mathbf{w}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}_{\mathbf{W}}\mathbf{w}_{\mathbf{k}} = 0$ ve $\mathbf{w}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}_{\mathbf{B}}\mathbf{w}_{\mathbf{k}} \neq 0$ şartlarını sağlayan izdüşüm vektörleri $\mathbf{w}_{\mathbf{k}}$, optimal izdüşüm vektörleridir. Bu sebeple eğitim setindeki tüm örneklerin $\mathbf{S}_{\mathbf{W}}$ matrisinin sıfır altuzayındaki izdüşümleri bulunmalıdır.

Bunu gerçekleştirmek için, $\mathbf{S_W}$ matrisinin sıfır altuzayını doğuran (span) birimdik (orthonormal) vektör seti bulunmalıdır. Fakat örnek uzayının çok büyük olması nedeniyle bu işlem doğrudan gerçekleştirilemez (Örnek olarak, 256x256 boyutlu bir imge 65536 boyutlu örnek uzayı oluşturur.) Bu sebeple yazarlar [6], örnek uzayı boyutunu indirgemek için piksel gruplama yolunu seçmişler ve Null Space yöntemini bu indirgenmiş yeni uzayda uygulamışlardır. Fakat bu işlem orjinal örnek uzayının kullanılmaması nedeniyle, yöntemin performansını düşürmektedir [9]. Aşağıda önerdiğimiz yöntem bu sorunu çözüp orjinal örnek uzayında çalışmamızı sağlar.

3. Ayırtedici Ortak Vektör Yöntemi

Eğitim setinin herbiri *N* örnek içeren, *C* farklı sınıftan oluştuğunu varsayalım. Bu durumda eğitim setinde toplam *M*=*NC* örnek olacaktır. Sınıfı *i* olan *m*'ninci imge örneğini *d*-boyutlu uzayda $\mathbf{x_m^i}$ ile gösterirsek, $\mathbf{S_W}$, $\mathbf{S_B}$ ve $\mathbf{S_T}$ matrisleri aşağıdaki eşitlikler kullanılarak bulunabilir:

$$\mathbf{S_W} = \sum_{i=1}^{C}\sum_{m=1}^{N}(\mathbf{x_m^i} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{i})(\mathbf{x_m^i} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{i})^T = \mathbf{AA^T}, \qquad (2)$$

$$\mathbf{S_B} = \sum_{i=1}^{C} N(\boldsymbol{\mu}_\mathbf{i} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\mu}_\mathbf{i} - \boldsymbol{\mu})^T, \qquad (3)$$

$$\mathbf{S_T} = \sum_{i=1}^{C}\sum_{m=1}^{N}(\mathbf{x_m^i} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x_m^i} - \boldsymbol{\mu})^T. \qquad (4)$$

Bu eşitliklerde $\boldsymbol{\mu}$ eğitim setindeki tüm örneklerin ortalama vektörünü, $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{i}$ *i*'nci sınıfa ait ortalama vektörünü göstermektedir. $\mathbf{A}$ ise *d*x*M* boyutlu matris olup, aşağıdaki eşitlikte verildiği gibidir.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{x_1^1} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{1} \quad \ldots \quad \mathbf{x_N^1} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{1} \quad \mathbf{x_1^2} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{2} \quad \ldots \quad \mathbf{x_N^C} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{C}] \qquad (5)$$

Daha önce de belirtildiği üzere *d*x*d* boyutlu $\mathbf{S_W}$ matrisinin sıfır altuzayını doğuran birimdik vektör setini bulmak, *d*'nin büyük olduğu durumlarda oldukça güçtür. Buna karşılık, $\mathbf{S_W}$ matrisinin erim altuzayını (range space) doğuran birimdik vektör seti çok daha küçük (*M*x*M*) boyutlu $\mathbf{A^TA}$ matrisi kullanılarak kolayca bulunabilir [9]. Bu sebeple eğitim setindeki örneklerin $\mathbf{S_W}$ matrisinin sıfır altuzayındaki izdüşümlerini bulmak için, $\mathbf{S_W}$ matrisinin erim altuzayını doğuran vektör setinden yaralanabiliriz.

V ve $V^\perp$ sırasıyla $\mathbf{S_W}$ matrisinin erim altuzayını ve sıfır altuzayını temsil eden uzaylar olsun. Bu iki uzayın direkt toplamı *d*-boyutlu örnek uzayını verir. Başka bir deyişle,

$$V \oplus V^\perp = R^d. \qquad (6)$$

$\mathbf{P}$ ve $\overline{\mathbf{P}}$ matrisleri sırasıyla V ve $V^\perp$ uzaylarının izdüşüm matrisleri olarak alınırsa, eğitim setindeki örneklerin $V^\perp$ uzayındaki izdüşümleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\mathbf{x_{com}^i} = \mathbf{x_m^i} - \mathbf{Px_m^i} = \overline{\mathbf{P}}\mathbf{x_m^i},\ m = 1,\ldots,N, \quad i = 1,\ldots,C. \qquad (7)$$

Bu işlem sonucunda her sınıftaki örnek, o sınıfı temsil eden ortak bir vektör üretir [9].

Optimal izdüşüm vektörleri ortak vektörlerin toplam saçılımını enbüyüten vektörler olacaktır. Başka bir deyişle,

$$J(\mathbf{W_{opt}}) = \arg\max_{|\mathbf{W^TS_WW}|=0} |\mathbf{W^TS_BW}| = \arg\max |\mathbf{W^TS_{com}W}|. \qquad (8)$$

Bu eşitlikte $\mathbf{S_{com}}$ ortak vektörlere ait saçılım matrisi olup, aşağıdaki eşitlik kullanılarak bulunabilir:

$$\mathbf{S_{com}} = \sum_{i=1}^{C}(\mathbf{x_{com}^i} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{com})(\mathbf{x_{com}^i} - \boldsymbol{\mu}_\mathbf{com})^T,\ i = 1,\ldots,C. \qquad (9)$$

Bu eşitlikte $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{com}$ ortak vektörlere ait ortalama vektörünü ifade etmektedir. Bu durumda $\mathbf{S_{com}}$ matrisinin sıfırdan farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler, optimal izdüşüm vektörlerini verir. Bu vektörlerin sayısı $r \le C-1$, $\mathbf{S_{com}}$ matrisinin kertesine eşittir.

Optimal izdüşüm vektörleri $\mathbf{S_W}$ matrisinin sıfır altuzayından seçildiği için her sınıftaki örneğin optimal izdüşüm vektörleri üzerindeki izdüşüm katsayılarından oluşan öznitelik vektörleri (feature vectors) $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{i} = [<\mathbf{x_m^i}, \mathbf{w_1}> \quad \ldots \quad <\mathbf{x_m^i}, \mathbf{w_r}>]^T$ aynıdır ve o sınıfı temsil eder. Başka bir deyişle $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{i} = \mathbf{W^Tx_m^i}$ ($m = 1,\ldots,N$, $i = 1,\ldots,C$) vektörü, m indisinden bağımsızdır. Bu da eğitim setindeki yüz imgelerinin %100 doğrulukla ayırtedilmesini sağlar. Bu vektörleri ayırtedici ortak vektörler olarak adlandırdık. Test setindeki yüz imgelerini ayırtedebilmek için öncelikle bu örneklere ait öznitelik vektörleri aşağıdaki eşitlikle bulunur:

$$\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{test} = \mathbf{W^Tx_{test}}. \qquad (10)$$

Daha sonra $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{test}$ ile eğitim setindeki sınıflara ait ayırtedici ortak vektörlerin arasındaki Öklid uzaklığına bakılır. Test imgesi, en küçük uzaklığı veren sınıfa atanır. $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{test}$ her sınıf için tek bir öznitelik vektörü ile karşılaştırıldığından tanıma oldukça hızlı ve verimli bir şekilde gerçekleştirilir. Bununla beraber, diğer yöntemlerde en yakın komşu algoritması kullanılıyorsa, test imgesi eğitim setindeki tüm örneklerin öznitelik vektörleri ile karşılaştırılır ve bu da verimliliği önemli ölçüde azaltır.

Yukarıda anlattığımız yöntem aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Adım 1: $\mathbf{S_w}$ matrisinin sıfırdan farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerini bul. Bu vektörler $\mathbf{S_w}$ matrisinin erim altuzayını doğuran vektör setidir. Bu vektörleri kullanarak $\mathbf{Q} = [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \ldots \quad \boldsymbol{\alpha}_k]$ matrisini oluştur. Yukarıdaki eşitlikte $\boldsymbol{\alpha}$ erim altuzayını doğuran vektörleri, k ise $\mathbf{S_w}$ matrisinin kertesini ifade etmektedir.

Adım 2: Her sınıftan herhangi bir örnek seç ve bu örneğin $\mathbf{S_w}$ matrisinin sıfır altuzayındaki izdüşümünü bul. İzdüşüm vektörü aynı zamanda sınıfları temsil eden ortak vektörü verir.

$$\mathbf{x}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{com}} = \mathbf{x}^{\mathbf{i}}_{m} - \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{m}}, \quad m = 1,\ldots,N, \quad i = 1,\ldots,C \quad (11)$$

Adım 3: Ortak vektörleri kullanarak $\mathbf{S_{com}}$ matrisini oluştur. $\mathbf{S_{com}}$ matrisinin sıfırdan farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerini bul ve bu vektörleri kullanarak optimal izdüşüm matrisini ($\mathbf{W}$) oluştur.

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \quad \ldots \quad \mathbf{w}_r] \quad (12)$$

Bu eşitlikte r, $\mathbf{S_{com}}$ matrisinin kertesini ifade etmektedir ve r'nin alabileceği en büyük değer C-1'dir.

4. Altuzay Teknikleri Kullanarak Ayırtedici Ortak Vektörlerin Bulunması

Bölüm 3'te ayırtedici ortak vektörleri ve optimal izdüşüm matrislerini bulmak için MxM boyutlu $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}$ matrisi kullanılmıştır. Fakat M arttıkça (M eğitim setindeki örnek sayısını ifade ettiğinden, eğitim setindeki örnek sayısı arttırılırsa buna bağlı olarak M de artar) işlem yükü de artar ve bir süre sonra numerik kararsızlık başlar. Bu durumda ortak vektörleri ve ayırtedici ortak vektörleri bulmak için altuzay yöntemlerinden ve Gram-Schmidt ortonormalleştirme yönteminden yararlanabiliriz.

Bu amaçla, ilk önce her sınıfa ait fark vektörleri aşağıdaki eşitlik kullanılarak bulunur,

$$\mathbf{b}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{x}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{k+1}} - \mathbf{x}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}}, \; k = 1,\ldots,N-1. \quad (13)$$

Bu durumda i'nci sınıfa ait farklılık uzayı $B_i = span\{\mathbf{b}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{1}},\ldots,\mathbf{b}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{N-1}}\}$ olacaktır. Bu altuzayların toplamı tüm eğitim setine ait farklılık uzayını verir. Başka bir deyişle,

$$B = B_1 + \ldots + B_C = span\{\mathbf{b}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{1}},\ldots,\mathbf{b}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{N-1}},\mathbf{b}^{2}_{\mathbf{1}},\ldots,\mathbf{b}^{C}_{\mathbf{N-1}}\}. \quad (14)$$

Farklılık uzayı B'yi doğuran doğrusal bağımsız (linearly independent) vektörlerin sayısı $\mathbf{S_w}$ matrisinin kertesine eşittir. Farklılık uzayının tümleyeni eğitim setine ait farksızlık uzayını ($B^{\perp}$) verir. B ve $\mathbf{S_w}$ matrisinin erim altuzayı aynı uzaylardır [9]. Farklılık uzayındaki fark vektörleri kullanılarak, Gram-Schmidt yöntemiyle $\mathbf{S_w}$ matrisinin erim uzayını doğuran birimdik vektör seti $\{\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_k\}$ elde edilir. Bu vektör setini kullanarak $\mathbf{Q} = [\boldsymbol{\beta}_1 \quad \ldots \quad \boldsymbol{\beta}_k]$ matrisini oluşturursak, her sınıfa ait ortak vektörler eşitlik (11) kullanılarak bulunabilir. Bu ortak vektörler, $\mathbf{S_w}$ matrisi kullanılarak elde edilen ortak vektörlerle aynıdır [9]. Ortak vektörler bulunduktan sonra, optimal izdüşüm vektörleri $\mathbf{S_{com}}$ matrisinin sıfırdan farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerine bakılarak bulunabilir. Aynı zamanda optimal izdüşüm vektörleri ortak vektörlere ait farklılık uzayı kullanılarak da bulunabilir.

5. Deney Sonuçları

Ayırtedici Ortak Vektör yönteminin performansını test etmek için, Yale yüz veri tabanı [5] kullanılmıştır. Bu veri tabanı 15 deneğe ait toplam 165 imge içermektedir. Şekil 1'de görüldüğü gibi her deneğe ait ifade ve aydınlatma farklılıkları içeren 11 imge bulunmaktadır. Bazı denekler için bu deneklere ait bazı imgeler birbirinin aynısı olup, bu kişilere ait birbirinden farklı toplam 10 imge vardır. Bu sebeple, bu çalışmamızda her denekten bir imge çıkartılıp her deneğe ait 10 farklı imge kullanılmıştır. Bu durumda veri tabanımızın boyutu 150'ye düşmüştür. Veri tabanındaki tüm imgeler önişlemden geçirilerek, gözler aynı konuma gelecek şekilde hizalanmıştır.

Şekil 1: Yale yüz veri tabanından bir deneğe ait önişlemden geçmiş imgeler.

Ayırtedici Ortak Vektör yönteminin dışında Yale yüz veri tabanı kullanılarak Eigenface, Fisherface ve Direct-LDA yöntemleri de test edilmiştir. Tüm yöntemlere ait tanıma oranları Tablo 1'de verilmiştir. Tanıma oranları "leave-one-out" yöntemi [10] uygulanarak bulunmuştur.

Veri tabanındaki her imge sırasıyla eğitim setinin dışında tutularak, eğitim setindeki diğer imgeler kullanılarak optimal izdüşüm matrisi ve ayırtedici ortak vektörler bulunmuştur. Daha sonra bu veriler kullanılarak, test edilmek üzere ayrı tutulan imge sınıflandırılmıştır. Ayırtedici Ortak Vektör yönteminin haricinde tüm yöntemler için tanıma sırasında 1-en yakın komşu algoritması kullanılmıştır.

Tablo1: Yale yüz veri tabanı kullanılarak elde edilen tanıma oranları

Yöntem	**Tanıma Oranı (%)**
Eigenface	74.66
Fisherface	96
Direct-LDA	92
Ayırtedici Ortak Vektörler	97.33

6. Sonuç

Bu çalışmada sınıflar arası saçılım matrisinin sıfır altuzayındaki optimal izdüşüm vektörlerini bulmak için yeni bir yöntem anlatılmıştır. Sınıflardaki örneklerin $\mathbf{S}_w$ matrisinin sıfır altuzayındaki izdüşümlerinin bağlı oldukları sınıfı temsil eden ortak vektörler olduğu gösterilmiştir. Ayrıca ortak vektörlerin bulunması sırasındaki numerik kararsızlığı gidermek için, altuzay yöntemlerini kullananan alternatif bir yöntem sunulmuştur. Optimal izdüşüm matrisi ortak vektörleri kullanarak elde edilmiş ve daha sonra her sınıftan birer örneğin optimal izdüşüm matrisi üzerindeki izdüşüm katsayıları kullanılarak ayırt edici vektörler elde edilmiştir. Optimal izdüşüm vektörlerinin bulunmasi esnasında, ortak vektörleri bulmak için, her sınıftan sadece bir örneğin kullanılması, yöntemin performansını önemli ölçüde arttırmaktadır. Bu yöntemde data kaybı olmadığından yöntem eğitim setindeki örneklerin %100 doğrulukla tanınmasını garantiler. Yapılan deney sonuçları yöntemin test setindeki örnekleri tanımada da diğer yöntemlerden çok daha başarılı olduğunu göstermektedir. Ayni zamanda test imgesinin tanınması, test imgesi her sınıf için o sınıfı temsil eden tek bir ayırtedici vektörle karşılaştırıldığından oldukça hızlıdır. Bu sebeple bu bildiride sunduğumuz yöntem, gerçek zamanlı yüz tanıma sistemleri için ideal bir yöntemdir.

7. Kaynakça

[1] R. Chellappa, C.L. Wilson, and S. Sirohey, "Human and machine recognition of faces: a survey," *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, pp. 705-740, May 1995.

[2] W. Zhao, R. Chellappa, and A Krishnaswamy, "Discriminant analysis of principal components for face recognition," in *Proceedings of 3rd IEEE International Conference on Automatic Face and Gesture Recognition*, April 1998, pp. 336-341.

[3] M. Turk and A. P. Pentland, "Eigenfaces for recognition," *Journal of Cognitive Neuroscience*, vol. 3, no. 1, pp. 71-86, 1991.

[4] D. L. Swets and J. Weng, "Using discriminant eigenfeatures for image retrieval," *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 18, no. 8, pp. 831-836, August 1996.

[5] P.N Belhumeur, J. P. Hespanha, and D. J. Kriegman, "Eigenfaces vs. Fisherfaces: recognition using class specific linear projection," *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 19, no. 7, pp. 711-720, 1997.

[6] L-F Chen, H-Y M. Liao, M-T Ko, J-C Lin and G-J Yu, "A new LDA-based face recognition system which can solve the small sample size problem," *Pattern Recognition*, vol. 33, pp. 1713-1726, 2000.

[7] H. Yu and J. Yang, "A direct LDA algorithm for high-dimensional data with application to face recognition," *Pattern Recognition*, vol. 34, pp. 2067-2070, 2001.

[8] K. Liu, Y-Q Cheng, and J-Y Yang, "A generalized optimal set of discriminant vectors," *Pattern Recognition*, vol. 25, no. 7, pp. 731-739, 1992.

[9] H. Çevikalp, M. Neamtu, M. Wilkes, A. Barkana, "Discriminative common vectors for face recognition," *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, submitted for publication.

[10] K. Fukunaga, *Introduction to Statistical Pattern Recognition.* 2nd edition, New York: Academic Press, 1990, pp. 220-221.